Dalla disciplina ricerca alla disciplina insegnamento: dal modello esperto di Klein ad un modello di lavoro per l'insegnamento della geometria

Daniela Lazzaro, Franco Dalla Vecchia

Abstract

The reflection on what is fundamental to teach in mathematical leads to the search of models, methods and concepts to be selected and to be transferred in teaching so that they become meant for those who want to learn. Initially, our search has been oriented to the study of geometry. Since we think fundamental task of the teaching is to reorganize the acquaintances of the pupils and to think that "the organization and the structuring of the space" is an important step for the understanding and the guideline in the real, our interest has addressed in particular to the relations within-outside, over-under, close-far away, that the student, also in the previous experience to the income in the primary school, knows and uses. Continuing in the study, pupils find themselves to face more and more complex concepts (perimeter, area, transformation....) and often not linked. The teacher therefore must reflect on two fundamental points:
1. which are the various models of geometry, which disciplinary nodes and relations between the same they allow to explain;
2. how we could make learning meaningful, how we can find and recognize a relationship between the several experiences and the concepts.
We are convinced that the teacher must be aware of the theoretical model to which is referred: this let the teacher reflect on its transfer in teaching and on its "translation" in learning. Therefore we have searched an expert able to orient the choice of the conceptual nodes and characterized by a methodology able to give value the epistemological aspects of the discipline.

Introduzione

La riflessione su cosa è fondamentale insegnare in ambito matematico ci ha condotto[2] alla ricerca di quali modelli, metodi e concetti disciplinari selezionare e trasferire nell'insegnamento in modo che divengano significativi per chi apprende
La nostra ricerca è stata, almeno inizialmente, orientata allo studio della geometria. Poiché riteniamo compito fondamentale dell'istruzione quello di riorganizzare e sistematizzare le conoscenze degli alunni e pensiamo che "l'organizzazione e la strutturazione dello spazio" costituisca un nodo importante per la comprensione e l'orientamento nel reale, il nostro interesse si è rivolto in particolare alle relazioni quali dentro-fuori, sopra-sotto, vicino-lontano (modello di spazio topologico) che l'allievo, anche

[2] *Ricerca effettuata nel laboratorio "Modelli di lavoro per l'innovazione didattica" assieme al collega F. Dalla Vecchia*

nell'esperienza precedente all'ingresso nella scuola di base, conosce ed utilizza.
Proseguendo nello studio, gli alunni si trovano ad affrontare concetti sempre più complessi (perimetro, area, trasformazione ….) e spesso scollegati tra loro. Il docente perciò deve riflettere su due punti fondamentali:

1. quali sono i diversi modelli di geometria, quali nodi disciplinari e relazioni tra gli stessi permettono di spiegare;
2. come rendere significativo l'apprendimento, ossia come far ritrovare e riconoscere una relazione tra le varie esperienze e i diversi concetti.

Relativamente al primo punto, siamo convinti che l'insegnante deve essere consapevole del modello teorico a cui fa riferimento: ciò lo porta a riflettere sulla sua trasferibilità nell'insegnamento e sulla sua "traduzione" in percorso di apprendimento. Abbiamo perciò ricercato un modello esperto[3] in grado di orientare la scelta dei nodi concettuali e caratterizzato da una metodologia di pensiero capace di valorizzare aspetti epistemologici importanti della disciplina.
Guidati dal modello esperto si mettono in rilievo i fatti, i concetti, le regole, i principi da trattare, si fa luce anche sulle interazioni che la ricerca ha sviluppato tra discipline diverse. Ogni modello infatti dovrebbe essere strumento flessibile ed economico per gli insegnanti poiché consente di controllare la complessità, di dare organicità ai contenuti e di seguire un flusso operativo[4].

1. Un modello per lo studio della geometria

Abbiamo individuato nella "concezione" della geometria di Klein un possibile modello esperto. Klein nel "Programma di Erlangen" ha elaborato un modello per l' unificazione delle geometrie attraverso lo studio di gruppi di trasformazioni
Klein si era infatti trovato di fronte ad una grande varietà di risultati della ricerca in matematica:

– in campo geometrico Bolyai e Lobavceskij (1832 e 1829) dimostrando l'indipendenza del quinto postulato di Euclide, svilupparono la geometria non euclidea iperbolica; Gauss (1777-1855) era arrivato a risultati simili, Riemann (1854) sviluppò la geometria ellittica;
– in campo algebrico matematici quali Gauss e Galois avevano già osservato che certe proprietà formali sono valide indipendentemente dalla natura degli elementi dell'insieme strutturato.

Il problema allora consisteva nella possibilità o meno di operare una riorganizzazione ed una unificazione dei risultati fino a quel momento ottenuti. Klein, nella tesi di dottorato all'Università di Erlangen nel 1872, sostenne come fosse possibile spostare l'attenzione **dalle relazioni tra**

[3] *U. Margiotta (a cura di), Riforma del curricolo e formazione dei talenti. Armando, Roma, 2001.*
[4] *R. Rigo, "L'analisi formativa della disciplina sostanzia l'autonomia di ricerca e di sviluppo delle singole scuole" in M. R. Zanchin (a cura di), I processi di apprendimento nella scuola dell'autonomia. Armando, Roma, 2002, pag. 15-36*

elementi di figure geometriche alle trasformazioni di oggetti geometrici, avvalendosi a tal scopo della teoria dei gruppi continui di trasformazioni, fondata dall'amico Sophus Lie.
E' perciò possibile distinguere le questioni che riguardano le proprietà delle trasformazioni da quelle relative alle proprietà geometriche delle figure. Il concetto unificatore delle diverse geometrie può essere individuato allora nell'idea di trasformazione, cioè la geometria diventa lo studio delle proprietà che rimangono invarianti rispetto ad un dato gruppo di trasformazioni geometriche.
Si può rilevare questa importante conseguenza:
definendo le strutture delle geometrie mediante relazioni che descrivono in astratto le proprietà formali delle trasformazioni geometriche si presenta in modo naturale il problema di ricercare la più ampia classe possibile di enti matematici ai quali possano applicarsi trasformazioni che abbiano le medesime proprietà formali. In effetti, sulla scorta di questo criterio furono scoperte famiglie di oggetti. Più precisamente, partendo dalle equazioni che descrivono l'equivalenza "agli effetti oggettivi" di sequenze operazionali diverse, furono scoperte famiglie di oggetti geometrici di tipo nuovo (Elie Cartan, 1913), caratterizzate da proprietà non immaginabili visivamente e descrivibili solo algebricamente.

Quella che segue è la mappa del modello esperto.

Figura prima della trasformazione → Figura dopo la trasformazione

ricerca delle proprietà invarianti

↓

SCELTA E FORMALIZZAZIONE delle Proprietà Invarianti *

↓

Tipo di Geometria (Modello di Sistema)

↓

STRUTTURA

Ho le proprietà relative a questo sistema e queste proprietà mi definiscono il tipo di geometria

N. B. Trasformazione come corrispondenza biunivoca dei punti del piano. Inizialmente è un concetto intuitivo (che non definiamo) in quanto una figura "diventa" (per ogni suo punto) un'altra figura.

2. Il modello di lavoro

Analizzato il modello esperto, è necessario aver chiaro che può essere trasferito nell'insegnamento in accordo con il tipo di scuola nel quale il docente si trova ad operare: scuola primaria, secondaria di primo o di secondo grado e rispettando una certa gradualità di proposta dipendente dalle caratteristiche degli alunni.
Il modello di lavoro organizza i compiti di apprendimento per l'allievo, definisce i contesti per l'esercizio delle abilità e l'acquisizione personale delle conoscenze: il modello esperto va perciò rivisitato con l'attenzione alle teorie psico-pedagogiche e metodologiche del curricolo. Nell'esperienza condotta il modello esperto è stato incrociato con il "curricolo per soglie di padronanza" al fine di selezionare concetti adatti alle diverse fasce scolari e prevedere gli snodi cognitivi per chi apprende.
Perciò la domanda cosa insegnare poiché "dotato di senso" diviene insegnare cosa, come e perché; di conseguenza la verifica degli apprendimenti necessita poi di un monitoraggio continuo e di strumenti diversificati ed integrati.
La ricerca di invarianti ci permette comunque di trovare un metodo unificante sia all'interno della disciplina che all'interno di diversi ordini di scuola: infatti è possibile raggruppare in una stessa classe oggetti diversi aventi però le stesse proprietà; possiamo condurre ad osservare insiemi diversi ma che si comportano in modo isomorfo rispetto ad una prefissata legge. Il capovolgimento del rapporto di priorità logica tra proprietà di oggetti e proprietà di trasformazioni ha importanti riflessi anche nell'insegnamento: il riconoscimento e la descrizione di invarianti, sin dalla scuola dell'infanzia, permette di semplificare i problemi e di cogliere il loro aspetto essenziale (economicità del modello); la comprensione che la scelta delle proprietà da osservare determina il tipo di trasformazione/fenomeno dovrebbe essere una conquista graduale per l'alunno (potenza e trasferibilità del modello). Le applicazioni sono molteplici, perché il modello favorisce l'acquisizione di un metodo per guardare, interpretare e prevedere, facilita la gestione della complessità e offre la possibilità di affrontare con sistematicità anche problemi che fanno parte della vita quotidiana, abituando così ad un rigore di analisi e di procedura. La ricerca di ciò che si conserva è un metodo che caratterizza la ricerca scientifica e che permette la formulazione di teorie unificanti. L'attenzione viene posta alle proprietà che di volta in volta vado ad indagare, proprietà che caratterizzano il sistema di indagine. La comprensione di ciò permette di ampliare sistemi geometrici e algebrici, permette di definire l'oggetto di studio in diversi ambiti. Si giunge ad una grossa economia di pensiero, alla

acquisizione di una metodologia potente e cognitivamente significativa. Inoltre, osservare attraverso le trasformazioni per la ricerca delle invarianti è un osservare più aderente alla realtà, al movimento dei corpi, a come una figura si modifica e contemporaneamente è un porre l'attenzione agli aspetti rilevanti che caratterizzano le proprietà di oggetti e fenomeni.
Il modello, nel caso della geometria, facilita la comprensione che sono possibili diverse geometrie, perché esistono diversi tipi di trasformazioni geometriche (trasformazioni isometriche, simili, proiettive, affini, …). Dal punto di vista didattico, l'attenzione viene posta allo spazio e non si fissa su singole figure che difficilmente permettono la trasferibilità delle proprietà studiate. Le caratteristiche che si studiano con le trasformazioni sono generalizzabili e sono proprietà evidenti e più facilmente comprensibili: sono proprietà di simmetria, di corrispondenza, di relazione che permettono la acquisizione di un metodo di indagine trasferibile. La ricerca dell'invariante conduce, con maggiore economia di pensiero, dagli oggetti concreti al concetto astratto di "forma".
Ciò che si conserva in determinati sistemi è infatti la forma. Molto importante è rilevare che molte proprietà delle figure (invarianti) non si "vedono" se non quando si "vedono trasformarsi": ad esempio da parallelogramma a rettangolo vi è la conservazione del parallelismo e della congruenza dei lati opposti, di congruenza o somma costante negli angoli, ecc… Perciò l'analisi delle proprietà delle figure attraverso lo studio delle trasformazioni e delle invarianti facilita nel discente l'acquisizione di procedure e processi cognitivi estendibili a molti ambiti, processi di modellizzazione e di generalizzazione (sintesi).
I concetti di sistema-insieme, trasformazione, modello, invariante e conservazione sono parole chiave; il modello esperto usato per indagare la realtà risulta essere economico in quanto è capace di spiegare contemporaneamente fenomeni anche molto diversi tra loro, potente per il suo potere previsionale ed è spendibile in quanto generalizzabile .
Limitandoci al campo della geometria è un razionalizzare lo spazio per orientarsi, descrivere e comprendere: cosa che risulterebbe difficile al discente se vengono dalla considerate singole figure, isolate. Questa è infatti una delle difficoltà che gli alunni incontrano nell'ampliare gli insiemi geometrici (e non solo), nel porre in relazione proprietà all'interno anche dello stesso ambito, nel collegare contenuti appresi nei diversi ordini di scuola e che sembrano distanti tra loro. Inoltre, la possibilità di allargare i campi di applicazione, di scegliere le "regole" (nel senso di regolarità) da considerare di volta in volta, offre lo spunto a riflessioni sulle relazioni di uguaglianza e più in generale di equivalenza, sulla relatività del concetto di uguaglianza, sulla possibilità di fissare regole del gioco diverse.
Quanto affermato ci proietta verso quello che diventerà il modello di lavoro del docente poiché si sono esaminate, relativamente al nodo ed la modello disciplinare scelto, le ragioni di spendibilità culturale e di forte valenza cognitiva. Inoltre, si sono chiariti i "punti forti" irrinunciabili per il docente, punti che costituiranno gli "snodi" concettuali del suo progetto di insegnamento. Punti forti del percorso didattico e perciò processi da sviluppare diventeranno:

- considerare oggetti reali individuandone invarianti e composizioni,
- inventare forme complesse mediante composizioni di forme semplici,

- riconoscere analogia di comportamento in insiemi diversi e comprenderne la forte valenza metodologica,
- acquisire la consapevolezza che tale metodo assicura maggiore flessibilità e trasparenza relativamente ai criteri in base ai quali si vogliono classificare le figure ,
- descrivere i criteri in base ai quali si sta analizzando il sistema in esame,
- scegliere una operazione (composizione) e analizzarne proprietà .

Fondamentale è il concetto di proprietà, poiché, anche rimanendo "uguale" l'oggetto, se cambio le proprietà, cambia il mio campo d'indagine e cambia la delimitazione del sistema: tali proprietà dipendono univocamente dalla trasformazione/relazione/operazione/funzione/applicazione (o viceversa).
Proprietà non è un concetto assoluto ma è in dipendenza di cosa vado ad analizzare, il "punto di vista": è la caratteristica che mi definisce il sistema, che rimane invariata durante la trasformazione e che definisce la "struttura" degli oggetti.
La ricerca di invarianti ci permette anche di avviare a progressive generalizzazioni:

- individuare "classi" di oggetti, cioè saper raggruppare in base a proprietà conservate (figure equivalenti, congruenti, figure isometriche,...);
- comprendere l'ampliamento di insiemi numerici e geometrici (l'ampliamento dipende dal problema esaminato) riconoscendone la conservazione di proprietà[5];
- acquisire il concetto di struttura, cioè saper raggruppare in una stessa "classe" trasformazioni/operazioni che mantengono determinate caratteristiche rispetto alla legge di composizione analizzata.

I criteri di classificazione sono ben esplicitati in base all'azione che i vari tipi di trasformazioni esercitano sulle figure in esame (esempio: proprietà di invarianza delle figure rispetto a determinate simmetrie, assiali o centrali, per definire triangoli isosceli ed equilateri, poligoni regolari o con simmetrie rotazionali). Ci si può avvicinare allo studio delle isometrie partendo anche dallo studio delle simmetrie di certe figure piane e dallo studio della tassellazioni (o pavimentazioni) del piano, oppure di certe figure ripetitive presenti nei fregi o nei mosaici.
L'approccio sarà diverso a seconda delle diverse fasce scolari ma il modello fornisce l'ottica per lavorare nella continuità :

- si descrive in base a cambiamenti osservati,
- si osserva e si classifica in base a proprietà scelte,
- si ricercano invarianti e si organizza in tabelle,
- si ricercano analogie di struttura e si trasferisce ad ambiti diversi,
- si generalizza e si predice,
- si progettano e si verificano congetture.

---

[5] *dai Programmi Brocca per la scuola superiore: "…..si inquadra nella concezione di Klein della geometria, tenderà a far vedere all'alunno il progressivo ampliamento dei relativi gruppi di trasformazioni e come le proprietà che caratterizzano le diverse figure si restringono man mano che si passa dalla geometria della congruenza a quella affine o topologica…"*

La tabella sotto riportata schematizza una possibile scansione del percorso in compiti di apprendimento per l'alunno (compiti esperti: rif. 2, pag. 1 dell'articolo), estesa anche ad una trattazione per l'aritmetica, in quanto il modello di riferimento (analisi delle proprietà invarianti, ricerca delle proprietà che si conservano) è un modello potente ed economico trasferibile a molti contenuti matematici. La prima unità di apprendimento è infatti comune ad entrambi i settori della disciplina.

<table>
<tr><th>FIGURE</th><th>NUMERI</th></tr>
<tr><td colspan="2">C. E. Introduttivo</td></tr>
<tr><td>2 C. E. esame relazioni tra figure, proprietà figure relative ad una trasformazione</td><td>-Esame relazioni tra numeri (Z,Q), ad esempio studio la relazione di equivalenza in Q (solo per le superiori)
-Operazioni in insiemi diversi e proprietà (elementari, medie, superiori)</td></tr>
<tr><td>3 C. E. composizione di trasformazioni</td><td>- Confronto delle proprietà delle operazioni ampliando gli insiemi numerici (medie e superiori)</td></tr>
<tr><td colspan="2">4 C. E. strutture algebriche</td></tr>
</table>

Questa seconda tabella riporta le soglie di padronanza relative ai diversi compiti esperti, soglie diversificate, almeno parzialmente, se riferite alla scuola secondaria di primo grado o di secondo grado.

	Soglie di padronanza MEDIE	**Soglie di padronanza SUPERIORI**
C. E. 1 Descrivere un sistema* , delimitarlo ed individuare trasformazioni	L'alunno è consapevole della necessità di isolare una parte dal tutto per comprendere ed interpretare una situazione problematica E' in grado di osservare trasformazioni e di scegliere le proprietà da analizzare a seconda della trasformazione scelta	L'alunno comprende la necessità di isolare una parte dal tutto per analizzare ed interpretare una situazione problematica E' in grado di osservare trasformazioni e di scegliere le proprietà da analizzare a seconda della trasformazione scelta E' pure in grado di individuare le proprietà che caratterizzano e descrivono una determinata trasformazione (poiché dato un problema sa quale trasformazione scegliere per risolverlo)
C. E. 2 Analizzare proprietà varianti ed invarianti	L'alunno è consapevole delle tappe di analisi da applicare per ogni trasformazione in relazione al sistema scelto E' in grado di rappresentare mediante modelli E' in grado di riconoscere e formalizzare proprietà varianti ed invarianti	L'alunno è consapevole delle tappe di analisi da applicare per ogni trasformazione in relazione al sistema scelto E' in grado di rappresentare mediante modelli E' in grado di riconoscere e formalizzare proprietà varianti ed invarianti
C. E. 3 Trasferire il modello* a nuove composizioni	L'alunno è consapevole della trasferibilità del modello alla composizione di trasformazioni. Sa individuare e descrivere le proprietà della composizione Sa riconoscere nuovi sistemi, proprietà invarianti	L'alunno è consapevole della trasferibilità del modello alla composizione di trasformazioni. Sa individuare e descrivere le proprietà della composizione Sa riconoscere nuovi sistemi, proprietà invarianti
C. E. 4	L'alunno è consapevole di poter analizzare e confrontare sistemi in base alle proprietà che si conservano	L'alunno è consapevole di poter analizzare e confrontare sistemi in base alle proprietà che si conservano

***** *- Un sistema matematico (geometrico, numerico) si può definire come un insieme di enti e relazioni tra gli enti (HILBERT), ma le proprietà del sistema in quel determinato momento di analisi sono correlate strettamente al mio oggetto d'indagine poiché le proprietà si possono definire come caratteristiche che rimangono inalterate anche quando gli enti subiscono una trasformazione (relazione, operazione, funzione, dilatazione …).*

- Un modello di un sistema assiomatico è un insieme "concreto" di oggetti geometrici che verifichino gli assiomi del sistema.

Bibliografia

MARGIOTTA U. (a cura di), *Riforma del curricolo e formazione dei talenti*, Armando, Roma, 2001
RIGO R., *L'analisi formativa della disciplina sostanzia l'autonomia di ricerca e di sviluppo delle singole scuole*, in ZANCHIN R. (a cura di), *I processi di apprendimento nella scuola dell'autonomia*, Armando, Roma, 2002, pp. 15-36
Programmi Brocca
Programmi per la scuola media, 1979
NOBILI R., *La cognizione dello spazio e il principio di dualità*, dipartimento di fisica, G. Galilei", Padova
BOYER C.B., *Storia della matematica*, ISEDI, Milano, 1976.
BOURBAKI N., *Elementi di storia della matematica*, Ed.Feltrinelli, Milano, 1963
TOMASI L., *Le trasformazioni geometriche e il Programma di Erlangen: un percorso di geometria per la scuola secondaria*
VILLANI V., *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate: le trasformazioni geometriche nella scuola secondaria superiore*, Novembre-dicembre 1995